

Movimento Para a Ação de um Novo Conceito Matemático

Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico/UFPA

MOVIMENTO PARA A AÇÃO DE UM NOVO CONCEITO MATEMÁTICO

A necessidade de criar conceitos surge na tentativa de resolução de problemas. O conceito engendra outros conceitos como também pode impedir um novo. O conceito de potência, por exemplo, traz subjacente o conceito de multiplicação, porém a regra que trabalha o conceito do quadrado da soma de dois termos pode impedir o conceito de potência de uma expressão algébrica. A aplicação da regra do quadrado da soma de dois termos que é “o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo”, simbolizada por $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pode impedir a visão do produto $(a + b)(a + b)$. O aluno memoriza a regra como resultado final, “esquecendo” (porque é provável que o professor demonstre ou o conduza à demonstrar este produto notável), ou não se dando conta de que a potência resulta de um produto.

Um conceito se constrói quando se remaneja conceitos anteriores que o preparam, mas que não passam a constituí-lo. Para o sujeito interpretante, os conceitos antigos fundidos num novo podem transformá-lo ou impedir a criação de outro. O conceito está sempre num estado de devir a ser, ele não é absoluto no sentido de encontrar-se pronto. Ele é fragmentário, pois está sempre se renovando, na medida em que o sujeito projeta nele sentidos novos.

As conexões do conceito com outros conceitos que dependem de esquemas operatórios, os significantes que representam o conceito (como os símbolos matemáticos, por exemplo) e o contexto no qual se encontra o conceito determinam os seus sentidos projetados.

Existe no contexto da sala de aula uma circularidade de sentidos produzida pelo jogo de linguagem no qual participam a matemática, o professor de matemática e o aluno. O professor tem que conduzir o aluno na construção possível de uma outra linguagem a partir da linguagem da matemática, porém esta construção muitas vezes é insuficiente para que o aluno compreenda, assim ele recorre ao colega que traduz a linguagem do professor.

Na prática de sala de aula, percebe-se que a mudança de enunciado matemático gera ansiedade ao aluno, o que denota um problema com a interpretação da linguagem matemática. Não entender a pergunta poderia indicar a falta de elementos teóricos, porém a forma como o

aluno reflete sobre a matemática parece ir além desta falta. A atividade matemática depende da linguagem e somente aquele que sabe ler e escrever na linguagem matemática pode participar do seu jogo de linguagem. “O conceito de saber está associado ao do jogo de linguagem (...) Se eu disser ‘Eu sei’ em matemática, então a sua justificação será uma demonstração” (Wittgenstein, 2000, p. 158).

O caso de uma aluna citado por Benedito Silva (1999, p. 58) retrata esta problemática. A aluna demonstrou saber responder a questão “2 pirulitos custam Cr\$ 10.000,00. Qual o preço de 1?”, mas não soube dizer à professora qual operação tinha efetuado para obter o resultado correto.

Se esta aluna sabe operar, é possível que tenha intuído corretamente os passos que deveria seguir para resolver o problema proposto, porém não sabe nomear estes procedimentos. Ela resolve, com o auxílio da intuição, mas esbarra no momento em que deve falar e explicar seu pensamento. A dificuldade de “dizer”, ler e escrever tem a ver com a linguagem.

Nas avaliações, percebe-se que os alunos preferem perguntas com enunciados trabalhados em sala de aula, assim seguem os modelos apresentados pelo professor e utilizam as mesmas técnicas de pensamento. A facilidade de seguir os passos de um algoritmo pré-estabelecido está na comodidade de não precisar interpretar o problema. Aí reside um pensar puramente técnico, seguido da ilação “se a pergunta é esta, então procedo de tal forma para obter o resultado”.

Quando o erro se dá por problema de operações elementares, costuma-se dizer que é “falta de base”. Para os professores da disciplina, tal problema é o resultado de um déficit teórico do aluno. Como exemplo, trago o caso de uma aluna do ensino superior, cursando uma disciplina que não era do primeiro semestre do curso: perguntou se podia “simplificar $\frac{3}{5}$ e igualar a 15”.

Será que o diagnóstico pode ser atribuído, neste caso, apenas à “falta de base”? O que “falta” no conhecimento matemático desta aluna quando não consegue discernir que três das cinco partes que estão dividindo um inteiro nunca será igual a quinze inteiros? O problema é ausência de intuição? Falta de raciocínio lógico? Ou foi a leitura errada da fração que não possibilitou a sua compreensão?

Por outro lado, os alunos afirmam com frequência: “existem professores que sabem muito, mas não sabem explicar”. O que significa “não saber explicar”? O que falta e o que excede na linguagem do professor de matemática que faz com que os alunos não consigam compreender? Assim como o aluno apresenta seu déficit teórico – a “falta de base” -, o professor, por sua vez, apresenta o seu, ou seja, não se faz entender, por problemas também de linguagem. Não entender o enunciado e não entender o professor também geram déficits.

É preciso então entender o que o aluno não entende. Este entendimento se reconhece via linguagem, através da própria linguagem da matemática, bem como pela compreensão e interpretação desta linguagem pelo aluno, entender esse processo é o papel de intermediador do

professor, enquanto sujeito que possibilita que a matemática produza sentidos para o aprendiz.

Os problemas encontrados no ensino e na aprendizagem da matemática permanecem com alguns aspectos obscuros, assim como algumas divergências nas suas argumentações. As polêmicas geradas pelo alto índice de reprovações de estudantes nessa disciplina precisam ser questionadas. Perguntar pela responsabilidade das reprovações se torna pertinente: seria o seu ensino, a falta de preparo dos estudantes ou a leitura equivocada que se faz da própria matemática?

Partindo do pressuposto que a matemática é ensinada com o objetivo de “desenvolver o raciocínio lógico” do aluno, como se costuma argumentar nos planos de ensino, pode-se dizer que, a partir desta visão, existem alunos que sofrem de uma “insuficiência lógica”, já que não correspondem aos anseios da escola. A lógica pode ser aprendida, assim como a intuição pode ser educada, porém os conceitos são produzidos de acordo com a imaginação e com a memória do sujeito, mas que dependerão do contexto e das condições oferecidas para que o sujeito produza sentidos do objeto percebido.

O movimento para a ação de um novo conceito depende do ato de interpretação do aluno e do contexto que envolve este ato, bem como o contexto em que está inserido o conceito a ser construído. A contingência que servirá como panorama deste ato de interpretação não pode ser prevista pelo professor, pois não podemos prever o rumo que tomarão as ilações e as analogias feitas pelo aluno, muito menos a conexão que fará do conceito a ser construído com os conceitos que têm em sua memória. Porém os elementos que servirão de respaldo para a leitura do objeto a ser percebido pelo aluno podem ser previstos pelo professor, como o texto apresentado e a linguagem a ser utilizada para explicar o texto. A condução dos jogos de linguagem nascidos das interferências e perguntas do aluno dependem da contingência e é neste momento que o professor mostra sua criatividade. O aluno entra no jogo e questiona, na medida de sua compreensão, e o professor compreende as conjeturas do aluno, na medida que responde ou refaz a pergunta. Quem dirige os jogos de linguagem não é apenas o professor. As conjeturas do aluno mostram como ele interpreta, e é nos jogos de linguagem, nascidos das ‘provas e refutações’, que o professor pode auxiliar o aluno na emancipação dos equívocos provenientes da linguagem.

A CIRCULARIDADE DE SENTIDOS

Existe circularidade entre o ato de interpretação e o conceito, pois a criação de conceitos se dá através de atos. Após o ato de interpretação, o sujeito projeta sentidos, compreende, e ele interpreta este ato. Ele projeta sentidos outra vez e reinterpreta.

Os textos matemáticos operam com a formalização de sua linguagem estruturada na lógica, desta forma, eles fecham suas interpretações dentro da lógica dedutiva, não permitindo

sentidos diversos, já que trabalham com o previsível. O rigor do texto matemático, objetivado e formalizado, pretende ter o controle dos sentidos. Tal controle pretendido pela matemática nos deixa devedores de perceber outras formas de entender o mundo.

A partir da contribuição heideggeriana, Gadamer (1993) desenvolve a teoria da hermenêutica filosófica, destacando o papel do diálogo na busca do sentido. Sem ser fruto de uma consciência isolada, a linguagem é o mundo da vida e é a morada do ser. O processo de compreensão se dá entre o nós e os outros no diálogo, e é através dele que os sentidos se apresentam. Compreender é o acontecimento que nos coloca de acordo com o outro e interpretar é elaborar as possibilidades na compreensão. O diálogo prevê uma fusão de horizontes, mas permite uma desorientação geral, pois desvela sentidos aprisionados que se mostram.

A formalização da linguagem matemática, estruturada na lógica dedutiva, impossibilita outras interpretações e evita a abordagem hermenêutica, pois ela quer operar com as supostas evidências de um sentido único, com uma linguagem ideal que evite se defrontrar com as ambigüidades da linguagem natural.

O sentido e a significação na linguagem matemática, ao fechar-se nos elementos de sua própria estrutura, opõe-se ao que Heidegger (1996, p. 219) afirma: “*chamamos de sentido o que pode ser articulado na interpretação (...) todas as significações sempre têm sentido (...) Das significações brotam palavras. As palavras, porém, não são coisas dotadas de significados*”. Para o autor, somente quem compreende pode escutar.

O fato “quem compreende pode escutar” explica a dificuldade do aluno, quando ouve falar de um conteúdo matemático. O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos ou igual ao quadrado da soma dos catetos? O teorema de Pitágoras é um exemplo desta dificuldade, pois sempre causou dificuldades de ser dito, e é neste momento que o auxílio da representação geométrica intervém.

Para Granger (1974, p.319), “*o característico de um modelo abstrato é ter em si o mesmo valor de objeto matemático, cujo sentido de cada elemento apenas remete ao conjunto das relações que definem a estrutura*”.

A estrutura escondida nos objetos matemáticos deve ser revelada pela estrutura formada pela linguagem matemática e pela linguagem natural. A forma do triângulo retângulo deve ser compreendida, para que a fórmula do teorema de Pitágoras tenha sentido.

Piaget (1974), em sua obra *O Estruturalismo*, ao falar das estruturas matemáticas e lógicas, diz que se outorgamos regras de construção, sob a forma de um processo operatório ao método axiomático:

a formalização constitui, então, um sistema que se basta a si próprio, sem apelo a intuições exteriores e cujo ponto de partida é em um sentido absoluto. (...) do ponto de vista formal onde se coloca o lógico, existe aí o exemplo, sem dúvida único, de uma autonomia radical, no sentido de uma regulação puramente interna, ou seja, de uma auto-regulação perfeita (p. 26).

Esta auto-regulação da matemática define o seu universo fechado, mas clama por uma abertura de sentidos via linguagem. Na perspectiva do aluno, a linguagem matemática será sempre codificada, caso não haja interferência da linguagem natural.

O PROCESSO DE SEGUIR A REGRA

Existem diferentes maneiras do aluno interagir com a regra que depende do contexto. Ele pode simplesmente aplicar a regra, por exemplo, $2 + 3 \times 6 = 2 + 18 = 20$, o que demonstra que ele intuiu corretamente a regra da ordem das operações.

Em caso contrário, ele pode não seguir a regra, mas pensar que está seguindo-a corretamente e resolver a operação da seguinte forma: $2 + 3 \times 6 = 5 \times 6 = 30$. Se ele não percebe o erro, a ilusão de estar seguindo corretamente a regra permanece. Porém ele pode também se enganar e calcular da seguinte forma: $2 + 3 \times 6 = 2 + 18 = 22$. Este engano poderá ser reconhecido e corrigido pelo próprio aluno. Em outro caso, ele pode aplicar a regra $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, porém, num outro tempo, a regra passa a não ter mais sentido para ele, então aplica uma outra regra: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

Existem casos em que o aluno pode seguir a regra e aumentar seu conhecimento, ao aplicar devidamente a regra de outros conceitos. Por exemplo, ao fazer analogia entre a constante de integração “c” da função $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ e o termo independente “c” da função $y = ax^2 + c$ ($y = ax^2 + bx + c$, $b = 0$), ou ao reconhecer a diferença entre $\cos(3x)^2$ e $(\cos(3x))^2$. Ele compreende que existe uma semelhança sintática e uma correspondência teórica entre os dois termos. Ele aplica um conhecimento aprendido em outro tempo e aprimora o conceito.

As conexões com outros conceitos se dão com o auxílio da memória. O sujeito faz analogias, buscando na memória lembranças do passado, de conceitos que ele já estudou em um outro tempo. Porém o aluno pode não seguir a regra corretamente, modificando e causando prejuízo ao conceito idealizado pela exigência teórica, ao fazer conexões com outros conceitos.

Como é o caso de um aluno que me disse: “professora, eu resolvi a equação $|2x - 3| = x + 1$ e encontrei $x = 4$ e $x = \frac{2}{3}$ ”; o que estava correto, “se eu colocar (na verificação)

4 dá certo e $\frac{2}{3}$ não dá certo. Pode pôr só um elemento no conjunto solução?”. Na sua resposta estava $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$, e a resposta deveria ser $S = \{4\}$. O que leva o aluno a pensar desta forma? Todo o seu raciocínio estava correto, mas escreve a resposta errada. É provável que o seu conceito de equação modular admita como conjunto solução a verificação para os dois resultados encontrados. Aplica a regra corretamente até o momento de encontrar as raízes, porém cria uma nova regra para encontrar o conjunto solução. A regra foi criada a partir do que ele viu e do que ele experienciou com o estudo da equação modular. A sua regra é “os dois elementos que verificaram a equação modular participam do conjunto solução, caso contrário, o conjunto solução é vazio, portanto o conjunto solução não pode ter apenas um elemento”.

Existe diferença em seguir de fato a regra, querer seguir a regra e pensar que está seguindo corretamente ou, ainda, não se interessar por ela. Querer seguir a regra já é o início do caminho.

A invenção de regras apresenta uma lógica própria, como o registro do aluno a seguir: $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$. O sinal negativo tem valor somente para o primeiro termo da segunda fração, pois ele não ‘vê’ que o sinal negativo é para toda a fração $\frac{x-3}{4}$. Ele interpreta de acordo com o que percebe através da visão, o que entra pelos olhos. A distribuição do sinal $\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{4}\right) - \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3}{4}$, que está subentendido, ele não consegue perceber.

Na linguagem escrita, é onde se cristalizam os atos intencionais do sujeito (o sinal negativo implícito para as duas frações: $-\frac{x-3}{4} = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}$). Porém um outro sujeito em contato com esta linguagem deverá reconhecer estes atos do sujeito que a escreveu.

Outro exemplo de criação de regras pelo aluno é na expressão $\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}$ que, após o aluno simplificar, iguala a $x-1$. Como ele não vê nenhum elemento no numerador após a simplificação por $x+1$, ele vê a fração como $\frac{\quad}{x-1}$, com um vazio no numerador, mas que deveria ser $\frac{1}{x-1}$. “Simplifica $x+1$ com $x+1$ ” e, no lugar do numerador, fica um vazio.

Assim, o termo que está no denominador pode ocupar este espaço vazio do numerador, e ele cria uma outra regra.

O conceito deve ser considerado antes e depois da interpretação do aluno. O aluno descobre as propriedades do objeto e constrói o seu conceito, como um processo de reorganização e construção por atos intencionais. As ações e/ou visões do objeto definem o conceito, e o esquema do conceito é imaginado de acordo com a imagem do objeto.

O conceito antes da interpretação do aluno é aqui considerado como o conceito que o professor pretende fazer o aluno construir, ou um conceito já construído pelo aluno em um outro tempo. O conceito depois da interpretação do aluno é considerado o conceito interpretado ou reinterpretado pelo aluno.

O processo de seguir a regra é imprevisto e depende do contexto. O erro do exemplo do aluno de Stela Baruk (1985), que diz ser $\mathcal{R} - \{1\}$ o domínio da função $y = x - 3$, acontece porque ele considerou y igual a $\frac{x-3}{1}$, e como o denominador deve ser diferente de zero, em sua interpretação, 1 será diferente de zero, assim, o domínio da função é $\mathcal{R} - \{1\}$. É uma verdade dizer que um é diferente de zero, mas não é isso que está sendo questionado, e sim os valores que a variável x pode assumir para a função $y = x - 3$. Ele faz analogia com $y = \frac{a}{b}$ onde “b” deve ser diferente de zero, e o domínio da função será $\mathcal{R} - \{0\}$. A interpretação da sua regra está correta, mas não responde ao que lhe foi questionado. Ele produz um sentido correto em um contexto no qual o seu sentido não faz sentido (conforme as exigências da matemática). O domínio de uma função demanda pelos valores que a variável x pode assumir para função y e não sobre as condições de existência do denominador da função.

A regra diz: “caso a variável esteja no denominador, devemos considerar que o denominador não pode ser igual a zero”. Este aluno considerou que o denominador deve ser diferente de zero, mas não levou em consideração a variável. O denominador não tinha variável, assim não teve sentido apenas constatar que o denominador era diferente de zero. Ele não intuiu o sentido correto da regra. Ele interpretou a regra de forma incorreta, porém com uma certa coerência, mas acabou modificando o seu sentido. Constatar que o denominador é diferente de zero e considerar que a variável que está na expressão algébrica do denominador deve excluir os valores que a igualam a zero, são duas regras diferentes.

O domínio de uma função deve mostrar os valores que ela pode assumir, assim, ele deve excluir uma possível divisão por zero. Quando o aluno diz que a função pode assumir todos os valores excluindo o um, é provável que tenha construído sua regra desta forma ‘ $\mathcal{R} - \{\text{o valor do denominador}\}$ ’, mas que representa uma versão da regra ‘ $\mathcal{R} - \{a(s) \text{ raiz(es) da equação}$

que está no denominador}. Ao projetar um outro sentido à regra, ocorre uma transformação desta regra.

O aluno conecta a função $y = x - 3$ com outras funções que ele estudou em um outro tempo. É possível que outra função tivesse como domínio $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R} - \{1\}$. Ele faz analogias entre estas funções e projeta sentido. A função $y = \frac{x-2}{x}$ tem como domínio $\mathbb{R} - \{0\}$, porque x deve ser diferente de zero, já a função $y = \frac{x+5}{x-1}$ tem como domínio $\mathbb{R} - \{1\}$ porque $x - 1$ deve ser diferente de zero. Na função $y = x - 3$, o aluno transforma para $y = \frac{x-3}{1}$ e conclui que 1 é diferente de zero, assim o domínio que ele estabelece à função é $\mathbb{R} - \{1\}$.

As conexões das funções que ele teve como experiência num outro tempo e as semelhanças sintáticas que percebe entre elas são elementos que participam na formação de seu conceito do domínio de uma função.

O conceito trabalhado em sala de aula não é mais o mesmo, é um outro. Este novo conceito é forjado pelas conexões conceituais que estão de acordo com a imaginação e com a memória do aluno. O aluno descobre as relações dos objetos, inventa e constrói os conceitos. O ato de construção é um ato de intenção.

O sujeito faz analogias, porém não transpõe conhecimentos, não generaliza automaticamente, justamente porque não existe generalização espontânea. A relação entre um conhecimento e suas aplicações está a mercê de fatos contingentes.

Segundo Glock (1998), o imperativo “seguir a regra¹”, de Wittgenstein, é um processo mecânico, intuitivo, platônico (idealizado, ou seja, o caminho para seguir a regra já está previsto) e hermenêutico (que é a interpretação da regra). O processo é mecânico, no sentido de bastar seguir seus passos; intuitivo, no sentido de dever ser representado no espaço e no tempo (começamos num tempo e num lugar e terminamos em outro); platônico, no sentido de determinação de sua finalidade, e hermenêutico, no sentido da regra possuir um sentido.

O estudante segue a regra corretamente, mas, durante sua aplicação, se depara com uma rede conceitual e perde o rumo. É por esse motivo que os alunos constantemente argumentam que não foram bem nas verificações, porque “caiu” na prova justamente “o que eu não tinha estudado”. Um aluno me disse: “eu estudei as mais difíceis”, e na prova, “as mais fáceis, eu

¹ A regra aqui considerada é a regra que determina uma resposta a cada passo, como, por exemplo, $y = 2x$.

não sabia fazer”, referindo-se às derivadas de funções por definição. Ora, se ele estudou as mais difíceis, a princípio, deveria saber as mais fáceis. Porém ele “treinou” as mais difíceis, mas não intuiu o sentido correto da regra, caso contrário, teoricamente, saberia resolver as “fáceis” e as “difíceis”.

Para Wittgenstein (1987), é necessário pretender (querer) seguir a regra. É uma intencionalidade virtual. A regra é interpretada corretamente, se o sujeito tiver a intuição correta da regra. Segundo o autor, a regra, o cálculo, a gramática e o jogo têm o mesmo significado. Quem participa do jogo tem que seguir suas regras, interpretando-as e seguindo as ordens da necessidade conceitual.

A derivada de uma função é definida por $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$; se o aluno sabia

derivar a função $f(x) = x^2 + 3x - 1$, por exemplo, a mesma regra ele deveria aplicar para uma função do tipo $y = 2x + 3$ que, ao contrário da primeira função, não precisaria desenvolver o produto notável $(x + \Delta x)^2$. Porém é justamente aí que reside o problema, ele “treinou” para resolver as derivadas, tendo que desenvolver produtos notáveis, mas, quando surge uma função mais simples, ele não sabe. Ou seja, ele não generalizou, não intuiu corretamente o sentido da regra. A aplicação correta da regra é um processo mecânico, mas deve ser interpretado. O aluno decora procedimentos, sem levar em consideração o sentido destes procedimentos.

Se o estudante diz que “sabe fazer as mais difíceis, e as mais fáceis, não”, é porque ele sabe aplicar todos os passos da regra para uma função de grau dois; para uma função de grau um, ele não sabe. Muda o contexto, muda o conceito.

Baruk (1985) conta em seu texto que um aluno dizia saber resolver equações, porém, face à equação $13x - 5 = 3x$, ele diz não saber resolvê-la, mas sabia resolver $13x - 5 = 3x + 2$. Certamente ele havia decorado os passos de resolução deste tipo de equação, mas não havia intuído o sentido da regra de resolver uma equação do primeiro grau. Talvez em $13x - 5 = 3x + 2$, ele junte os termos semelhantes $13x$ com $3x$ e 2 com -5 , porém, na equação $13x - 5 = 3x$, junta $13x$ com $3x$ e -5 não tenha com o que juntar. Assim, em sua perspectiva, a regra muda e ele não sabe mais resolver.

A regra é um processo mecânico, mas tem um sentido, já que ele também é hermenêutico. Devo proceder de tal e tal forma, porque meu objetivo é encontrar alguma coisa. Assim, o procedimento tem sentido. O aluno mecaniza o procedimento sem dar sentido. Posso descer as escadas de um prédio mecanicamente, sem pensar nos meus passos, mas meu objetivo é ir ao andar térreo e verificar se tem correspondência. Porém, se eu descer as escadas sem prever o que vou fazer no andar térreo, não tem sentido. A regra de descer as escadas é mecânica, mas o objetivo, a previsão do que vou fazer no andar térreo, dá sentido à ação. A intuição do sentido da regra é o que guia a experiência. Assim, a possível existência da correspondência que pretendo encontrar guia meus passos até o andar térreo.

Não intuir o sentido da regra é não reconhecer que ela é única, não muda, é sempre a mesma. Os passos são iguais em qualquer circunstância. O aluno não se pergunta como deve fazer e sim o que deve fazer. Isso acontece porque ele fixa seu reconhecimento da regra num contexto determinado. A pergunta me parece ser a seguinte: “o que devo fazer, quando me deparo com esta proposição?”. O correto seria “qual o primeiro passo da regra, depois o segundo... até chegar o último passo?”.

O aluno pode muito bem construir um conceito num determinado momento e, em outro, modificá-lo. Ele pode medir o lado oposto e a hipotenusa de diferentes triângulos retângulos formados por um mesmo ângulo e concluir que esta razão é sempre a mesma. O professor dirá que esta razão constante chama-se seno de um ângulo. O professor mostra e explicita a regra do cálculo do seno de um ângulo percebida e descoberta pelo aluno. Porém, mais tarde, o aluno pode aplicar essa mesma regra em um triângulo obtusângulo, por exemplo. As razões trigonométricas num triângulo retângulo, para o aluno, derivam em razões trigonométricas num triângulo. Ele modifica o conceito.

A capacidade reflexiva do aluno não atinge a amplitude necessária para perceber em que casos a regra das razões trigonométricas devem ser aplicadas. Stella Baruk² cita a famosa simplificação de $\frac{a+b}{a+c}$ em $\frac{b}{c}$. Ora, o aluno aprende que $\frac{ab}{ac}$ é igual à $\frac{b}{c}$, daí decorre a justificativa da simplificação. Para fazer o aluno refletir sobre tal simplificação incorreta, como menciona Baruk, o professor pode ilustrar com a situação $2 = \frac{10}{5} = \frac{4+6}{4+1} = \frac{6}{1} = 6$. O aluno vai concordar então que não pode simplificar a fração desta forma, porém, em outro tempo, ao se deparar com $\frac{\cos x + 3}{\cos y + 3}$, talvez ele diga que esta fração é igual à $\frac{\cos x}{\cos y}$. Ele cria regras conforme o contexto.

Baruk mostra um outro exemplo de “lógica da magia” do cálculo: $\frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{(7+3) + (4+5)}{4+3} = \frac{18}{7}$. Este exemplo fornece elementos para que nós possamos perceber o quanto são obscuras, para o aluno, certas regras matemáticas. Assim como em sua concepção tudo parece tão vago e sem sentido que ele pode também produzir regras que não tenham sentido.

² Os erros dos alunos franceses que a autora expõe são similares aos erros de nossos alunos brasileiros.

Obedecendo a regra da adição de frações, a operação deveria ser calculada como $\frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{3 \times 7 + 4 \times 5}{4 \times 3}$, porém podemos perceber que 3 e 7, 4 e 5 e ainda 4 e 3 deveriam ser multiplicados, mas o aluno soma. Como ele não vê sentido em multiplicar estes números, já que se trata de uma soma, então ele muda a regra e soma ao invés de multiplicar.

Assim como esta, existem outras regras que o aluno cria. Ele sabe que $2 + 3 = 5$, e deste pressuposto, conclui que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$. Ele faz analogias e estas analogias derivam em erro. Ele estabelece critérios para fazer seus julgamentos através do que percebe e do que vê.

Caveing (2004, p. 15) diz que o sujeito apenas pode experimentar o conceito porque não é produto seu. “O conceito, nascido de outros conceitos, engendra outros” (tradução minha). Na matemática, é preciso ver para pensar, mas existe perigo e ilusões no ato de ver. A imagem é o que é “dado”, a escrita é o que é “construído”, e o ato de construção é uma intenção.

O aluno cria novos conceitos a partir de conceitos já construídos. A conjuntura pode ser diferente, mas para ele, a estrutura é a mesma. A forma e a estrutura em que se encontra o objeto, muitas vezes, não é vislumbrada pelo aluno, ao criar as suas regras.

De acordo com Wittgenstein (1987), descrever é diferente de explicar, e é assim que nós mostramos e explicitamos as regras de um jogo. Podemos ensinar ao outro como aplicamos a regra, mostrando como a aplicamos, já que a linguagem objetivante simplesmente descreve os fatos através de uma imagem. E explicar, segundo o autor, seria completar o visível pelo invisível, em forma de uma figura, como tenta fazer a ciência a propósito dos fatos.

Para mostrar ao aluno como aplicamos uma regra, analisamos a pergunta a ser respondida e a forma em que se encontra a incógnita, colhemos os dados do problema, dizemos qual o objetivo do primeiro passo da regra e seguimos a regra fazendo transformações lógicas com as sentenças matemáticas. Explicamos todos os passos da regra à medida em que descrevemos nossos atos no quadro.

A pergunta do problema é, muitas vezes, desconsiderada pelo aluno. Quando resolve uma equação utilizando a fórmula de Bhaskara, ele não se questiona se a equação a ser resolvida está na forma $ax^2 + bx + c = 0$, ou quando aplica o teorema de Pitágoras, ele não se pergunta se o triângulo a ser resolvido é um triângulo retângulo. Este fato mostra que o aluno aplica procedimentos de resolução sem se dar conta de que os mesmos servem para responder uma outra pergunta e não a pergunta que lhe foi feita.

Certa vez, um aluno, mostrando seu caderno, me disse : “Olha se eu compreendi bem”. Em seu caderno havia uma função matemática escrita, e de cada termo da função, saía uma flecha

com uma explicação. Ele havia dado sentido ao conceito da função com as palavras de seu vocabulário e queria que eu verificasse se a sua explicação coincidia com a minha.

Para ilustrar a falta de correspondência da explicação do professor e da compreensão do aluno, trago um problema recorrente em sala de aula. Para isolar x na equação $x + 2 = 4$, diz-se que 2 está somando x , então ele deverá passar para o outro lado da igualdade diminuindo de 4, assim como na equação $x - 3 = 5$, diz-se que 3 passará para o outro lado da igualdade somando 5. Costumava-se resumir este procedimento com a regra “trocar o sinal”. Assim, na equação $4x = 8$, 4 deveria passar dividindo por 4, porém os alunos continuavam aplicando a regra “trocar o sinal”, e a equação se transformava em $x = 8 - 4$.

Os professores se deram conta de que seria melhor os alunos aprenderem as operações de números inteiros, bem como as equações de primeiro grau, utilizando material concreto e com aplicação prática no cotidiano do aluno. O surpreendente é que as duas alternativas de solução resolviam o problema em parte, pois bastava uma pequena mudança, como, por exemplo, pedir que resolvessem o cálculo $2 - 5 - 3 + 7$, ou uma equação do tipo $\frac{2x}{3} + 1 = 5$ que a situação já se complicava. Conseguia-se êxito no sentido de que o aluno não reproduzisse mais uma regra inadequada e, quando se falava na tal regra, enfatizava-se que um termo, ao passar de um lado a outro da igualdade, trocava de operação e não de sinal.

No caso do cálculo $2 - 5 - 3 + 7$, parecia tão evidente supor uma situação em que se tem 2 e 7, mas se deve 5 e 3. Tem-se um total de 9, que se deve subtrair 8, assim “paga-se as dívidas e resta ainda 1”, argumentavam o professor e os livros didáticos. Este raciocínio tem lógica para o professor, que está habituado a somar salários e descontar despesas para calcular a quantia que sobrá ou faltará ao final do mês, não para o aluno, que não tem o hábito de lidar com dinheiro.

Criar regras do tipo “o amigo de meu amigo é meu amigo, o amigo de meu inimigo é meu inimigo, etc. e tal”, como é o hábito de alguns professores de matemática, com a intenção de fazer o aluno compreender as operações com números inteiros (regra de sinais) parece perverso. Porém fazer um aluno colocar-se em uma situação que não lhe é familiar, como a de somar quantias e pagar dívidas que ele não tem, também parece não ter sentido, principalmente quando se trata de aluno pobre. Aluno que perde aula por não ter roupa para colocar não deve estar acostumado com “mesadas” e, conseqüentemente, não deve estar acostumado com o manuseio de dinheiro.

Em outra situação, os números positivos podem ser representados por palitinhos vermelhos, e os números negativos por palitinhos azuis, assim, temos 9 palitinhos vermelhos e 8 azuis. Oito palitinhos vermelhos se compensam com 8 azuis e sobra 1 vermelho. Logo, $2 - 5 - 3 + 7$ é igual a 1.

Foi assim que aprendi a ensinar a adição de números inteiros num dos congressos de educação matemática. Na prática, esta situação imaginária com os palitinhos que se compensam é uma regra. É fácil admitir que $9 - 8 = 1$, porém $8 - 9$ é mais complexo. Pago 8 e fico devendo 1, ou compenso 8 palitinhos vermelhos e 8 azuis e fico com um palitinho azul. E se dissermos ao aluno que $8 - 9 = 8 - 8 - 1$ é igual a -1 , não parece tão evidente quanto a regra do “tenho e devo”, ou dos “palitinhos vermelhos e dos palitinhos azuis”?

O que quero salientar é que todos os diferentes procedimentos de ensinar não deixam de ser regras e são interpretadas pelo aluno. Os professores ditos “construtivistas” optariam pela regra do “tenho e devo” ou dos “palitinhos vermelhos e dos palitinhos azuis”. Estas servem para ilustrar a formalização, mas não são garantias da aprendizagem do aluno. Os professores ditos “tradicionais” não desenvolveriam essas etapas com estas regras e iriam direto ao algoritmo. O sentido que o aluno dará a regra não está previsto pelo professor, o que o professor pode prever é se a regra tem sentido. Tem sentido ensinar com palitinhos vermelhos e azuis? O aluno será captado pela idéia da compensação de n palitinhos vermelhos e de n palitinhos azuis? Caso a regra tenha sentido para o aluno, outra pergunta é pertinente: o aluno saberá transpor a regra dos palitinhos para a operação formalizada sem dispor de palitinhos?

Quando a regra dos palitinhos é livrada dos palitinhos começa o processo de abstração da regra. Este processo muitas vezes não atinge seu objetivo justamente porque o contexto de contar palitinhos e compensar vermelhos e azuis é diferente do contexto de lidar com a escrita matemática.

No cálculo $2 - 5 - 3 + 7$, o aluno junta os palitinhos azuis (-5 e -3) e obtém 8, junta os palitinhos vermelhos (2 e $+7$) e obtém 9, compensa todos os palitinhos possíveis, 8 azuis e 8 vermelhos e percebe que sobra 1 vermelho. Este 1 representa a cristalização dos atos intencionais do aluno: o ato de juntar os palitinhos de mesma cor, o ato de compensá-los e o ato de perceber a quantidade de palitinhos que sobram após a compensação.

O aluno que faz a prática mencionada acima pode ter dificuldades em resolver, por exemplo, o cálculo $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$, que tem o mesmo significado do cálculo anterior, porém com números fracionários, justamente porque o contexto não é o mesmo, e o conceito de “juntar, compensar e perceber o que sobra” já não tem mais sentido. As regras mudam conforme o contexto.

Na aplicação de uma prova sobre logaritmos, um aluno demonstrou saber que $\log ab = \log a + \log b$, mas ao ter que resolver a questão: se $\log a = 0$, $\log b = -1$ e $\log c = 1$, calcule $\log \frac{ab^2}{c}$, escreveu $(\log a \cdot \log b)^2 - \log c$. Assim, percebe-se que ele admite que $\log ab = \log a + \log b$, porém para $\log ab^2$, que ele deveria aplicar a mesma regra, ele cria outra. Outra vez, podemos verificar que, se o contexto muda, a regra também muda na perspectiva do aluno.

O aluno não vê semelhança entre as duas expressões algébricas e não percebe que, nas duas, existe o logaritmo de um produto. Na primeira, o produto de 'a' por 'b' e, na segunda, de 'a' por ' b^2 '. Para resolver o problema, ele cria outra regra que lhe faz sentido.

É na construção possível de uma outra linguagem que advém da linguagem matemática para a linguagem natural que se dão os maiores problemas à compreensão de um enunciado. Os alunos argumentam, com frequência, que “saberiam resolver”, se tivessem entendido o enunciado. Basta uma pequena modificação na linguagem para o enunciado não ser entendido. O ponto de equilíbrio, por exemplo, que representa a quantidade de equilíbrio, e o preço de equilíbrio, apesar de terem o mesmo significado, são proposições que assumem sentidos diferentes para o aluno.

É provável que o aluno saiba que um ponto é representado pelas coordenadas cartesianas (x, y) e que, na função $p = ax + b$, “x” representa a quantidade de equilíbrio, e “p” representa o preço de equilíbrio, daí que o ponto de equilíbrio representado por (x, p) não é imediato, tornando-se um outro conceito que deriva dos dois primeiros. Não dominando a linguagem, já que não consegue fazer analogias com as proposições desta linguagem, as significações e os sentidos ficam prejudicados.

O sentido de um conceito depende do seu contexto. A ação de dar sentido ao objeto e criar o seu conceito depende da experiência do sujeito com o objeto, mas aí reside um obstáculo. Para Granger (1974), é na relação de um conceito e suas significações que se encontrarão os obstáculos que impedem o movimento desta ação.

A FUNÇÃO DA IMAGINAÇÃO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO

Ao trabalhar com as aplicações de derivada de uma função, em problemas que envolviam áreas e volumes, um aluno, referindo-se aos sólidos geométricos, me disse: “eu só consigo imaginar se eu puder tocar”. Este “tocar” evidentemente que se tratava de um “tocar imaginado”, um “ver com as mãos da imaginação”. Ele já trabalhava em projetos de engenharia, e, comentando sobre sua experiência com a geometria, acrescentou: “eu tenho que me imaginar tocando e mexendo nas arestas, mas com as parábolas, eu não consigo imaginar nada”. Ao conversar com este aluno, pude perceber que ele era competente em seu trabalho, inclusive disputou vagas com engenheiros já formados em empresa de grande porte, classificando-se em primeiro lugar.

Este aluno, pela primeira vez, participava das aulas respondendo às questões que eu propunha. Apesar de uma certa desenvoltura com os conhecimentos em geometria, principalmente com as fórmulas de área e de volume de sólidos geométricos, ao responder a questão “como representar algebricamente a área total de uma caixa fechada com base quadrada?”, disse que a base poderia ser representada por x^2 e que o restante da caixa poderia

ser representado por $5xy$. De acordo com sua resposta, ele considerou a área lateral $4xy$ (de arestas x e y) e a tampa de área xy . Ora, a tampa deve ser igual à base. Por que este aluno comete um erro elementar, levando em consideração que este tipo de conhecimento está incorporado em seu trabalho profissional?

O único argumento que encontro para explicar tal erro é a mudança de contexto. Em seu trabalho, ele projeta dados em um computador e calcula as áreas e volumes dos sólidos, na sala de aula, ele trabalha com variáveis e não com dados específicos. No seu trabalho profissional, ele é reconhecido, em sala de aula, o seu desempenho não é satisfatório. Ele também me argumentou que não havia atingido bom desempenho na primeira prova, porque não conseguia “imaginar” os conteúdos (limites e derivadas de uma função).

Os atos imaginados fazem parte da compreensão deste aluno. Os seus toques imaginados nos sólidos constituem os seus atos intencionais que se cristalizam nas imagens que ele reproduz no computador. Quando ele projeta o sólido com arestas e com dados, ele projeta sentido e reproduz em imagem visual.

Estes atos imaginados juntam-se às lembranças em que está associado o objeto imaginado, mas que estão relacionados ao contexto em que o objeto é percebido; estes atos se reproduzem na escrita, como no caso do aluno que calcula a equação $\log_3(x-1) = 2$ e encontra $\log_3 x = 2 + 1$. Aplica a regra aprendida em outro tempo e que está em sua memória. Aplica os procedimentos de resolver uma equação do primeiro grau no lugar de aplicar a definição de logaritmo. Ele modifica o sentido da definição do logaritmo, porque não intui corretamente o sentido da regra. Assim, cria estratégias para resolver e conclui que o valor da incógnita x é igual a três. A conexão que ele faz dos procedimentos de resolução de uma equação do primeiro grau com os procedimentos da definição do logaritmo é imediata, pois existe uma semelhança sintática.

Quando lhe é proposto o exercício “se $\log a = 0$, $\log b = -1$ e $\log c = 1$, calcule $\log \frac{ab^2}{c}$ ”, ele encontra $10^x = \frac{ab^2}{c}$ e segue o seu propósito. A aplicação da regra é um processo mecânico, mas intuir em qual situação pode-se aplicar a regra, não é um processo mecânico. Ora, ele aplica a regra da definição de logaritmo que era conveniente em outros exercícios, porém, agora, a aplicação desta regra não satisfaz o que lhe é pedido. Ele aplica mecanicamente uma regra sem se dar conta de que ficará com quatro variáveis para encontrar o valor. A regra de aplicação neste caso é outra.

Como e quando aplicar a regra são tarefas distintas. As propriedades das operações com logaritmos e a definição de logaritmo são diferentes, apesar de derivarem do mesmo

objeto. A regra para a definição de logaritmo é uma e a regra para aplicar as propriedades das operações com logaritmos é outra.

No cálculo diferencial e integral, o aluno aprende isoladamente cada técnica de integração. Porém, quando se depara com diversas integrais e deve decidir qual técnica aplicar para resolvê-las, ele não sabe mais resolver, mesmo que disponha das fórmulas de integração.

As integrais $\int \cos^2(2x)dx$ e $\int \cos(2x)^2 dx$ são exemplos de dificuldades encontradas pelo aluno. Reconhecer que a primeira integral está na forma de $\int u^p du$ e que a segunda está na forma de $\int \cos u du$ não é evidente para ele. Observar a forma da função para poder aplicar a devida fórmula de integração é a tarefa mais difícil, exatamente porque existe uma semelhança sintática, e esta semelhança interfere na identificação de dois conceitos diferentes. Diferenciar as regras que podem derivar as funções $f(x) = \sqrt{\sin(3x)}$ e $f(x) = \sin \sqrt{3x}$, perceber que $\log ab$ é igual a $\log a + \log b$, mas que $\log ab$ não é igual a $\log a \times \log b$, são exemplos de analogias sintáticas e diferenças conceituais que o aluno não reconhece. O problema destas semelhanças sintáticas e diferenças conceituais é de linguagem, justamente porque o aluno tem dificuldade de ler um texto escrito em linguagem matemática.

Hersh e Davis (1990) dizem que, para Quine, nossas lembranças são por palavras e, para Aristóteles, são por imagens. Qual lembrança suscitaria a expressão “encontre o valor de x na equação”? A imagem de outras equações resolvidas em outro tempo? O significado das palavras que designam cada termo da equação?

O movimento dialético entre intuição e conceito de um objeto está associado a imagens; como as imagens trazem lembranças e, destas lembranças, surgem analogias, o conceito se transforma, quando o sujeito faz estas analogias e constrói outra linguagem advinda da linguagem escrita ou falada. A linguagem escrita cristaliza estes atos que passam a representar seu pensamento. O sujeito transforma e modifica conceitos matemáticos, de acordo com a sua interpretação das analogias sintáticas que faz do objeto com outros objetos.

AS ANALOGIAS COM OUTROS CONCEITOS

As analogias são inevitáveis no processo de aprender. O hábito do aluno de revirar as páginas do caderno é uma mostra das analogias que ele tenta fazer dos exercícios propostos com aqueles já resolvidos em sala de aula. Ele busca nas folhas precedentes do caderno um exercício semelhante que contenha os passos do problema a solucionar e um modelo a seguir. A consulta no caderno tem a finalidade de encontrar não apenas exercícios resolvidos, que tenham a mesma semelhança sintática do exercício que ele tem que resolver, como também o algoritmo que deve aplicar.

O professor tem o hábito de fornecer diferentes modelos de exercícios nos quais figuram um determinado objeto matemático, com o objetivo de possibilitar que os alunos saibam resolver problemas em diferentes situações. Os livros didáticos de matemática fazem o mesmo.

Quando o professor trabalha uma determinada regra, ele procura mostrar as diferentes situações em que podem aparecer uma função nas quais se aplicam esta regra. A derivada da função do tipo $y = u^p$, onde p pode aparecer em diferentes situações, é um exemplo da necessidade de mostrar os diferentes contextos em que ela poderá ser aplicada. Por exemplo, $y = (x - 3)^2$, a função já está pronta para ser derivada, ou seja, a função está na forma de $y = u^p$, para se aplicar a sua fórmula de derivação. Existem casos em que é preciso preparar a função para deixá-la na forma de $y = u^p$ (com $p \neq -1$) e, posteriormente, aplicar a regra de derivação, como nos seguintes exemplos: $y = \frac{2}{(x + 1)^3}$, em que é preciso passar o termo do denominador para o numerador e inverter o sinal do expoente; $y = \sqrt{x + 3}$, em que é preciso transformar a função para expoente fracionário; e $y = \frac{3}{\sqrt{x - 2}}$, em que é preciso passar a função que está no denominador para o numerador e depois transformá-la para expoente fracionário. Outras funções necessitam ser identificadas com esta forma, como nos seguintes exemplos: $y = \text{sen}^2(x + 3)$, em que é preciso considerar a função u igual a função $\text{sen}(x + 3)$; $y = \log^3(2x - 3)$, em que é preciso considerar a função u igual a $\log(2x - 3)$, e assim por diante.

Estes modelos estão previstos nos planos de aula de um professor de Cálculo Diferencial e Integral e é quase impossível evitá-los. Selecionei um exemplo fácil de caracterizar, porém poderia ter feito o mesmo com as equações exponenciais e logarítmicas, ou qualquer outro conteúdo, como os problemas para resolver triângulos com a lei dos senos e problemas para resolver com a lei dos cossenos.

Propor mudanças e deixar de mostrar modelos é tarefa muito difícil, já que o professor está atrelado a um programa e a uma carga horária. Caso o professor de Cálculo I, por exemplo, não cumpra o programa dentro da carga horária disponível, o aluno será prejudicado em Cálculo II.

Ao perceber estas diferentes modalidades de se deparar com uma regra, o aluno busca nelas soluções para os problemas propostos pelo professor, fazendo analogias. Se ele tem um problema a resolver com dois lados e um ângulo de um triângulo qualquer, por analogia, ele concluirá que deverá utilizar a lei dos cossenos. Este processo de imitar é espontâneo. O modelo indica uma conduta a seguir. A relação entre os termos de uma analogia se estabelece por semelhanças.

Além das analogias visualizadas por modelos, pode-se também fazer analogias com conceitos armazenados na memória. O aluno procura um objeto de estudo de um outro tempo ao estudar um conteúdo do tempo atual, como o caso do aluno que aplica a fórmula de resolução da equação do segundo grau, mesmo que esta resolução não seja necessária. Ele deve derivar uma função de grau dois, mas ele encontra suas raízes, porque este procedimento está em sua memória.

Analogias sintáticas acontecem, quando existe semelhança simbólica, como, por exemplo, as integrais $\int (x + 1) \operatorname{sen} x dx$ e $\int \operatorname{sen}(x(x + 1)) dx$, que são resolvidas por regras diferentes, mas sua sintaxe é semelhante. Um matemático perceberá facilmente a diferença, mas o aluno não.

De acordo com Granger (1970, p. 92):

a complexidade das expressões formais chega a ser rapidamente tão exorbitante, que excede as possibilidades de memorização e de síntese de uma mente comum; o que se ganha em rigor, se perde radicalmente em eficácia (tradução minha).

Os símbolos matemáticos apresentam-se como códigos a serem traduzidos e depois interpretados. Eles representam, dessa forma, uma metáfora a ser compreendida. A metáfora transporta a nomeação de um termo para outra significação e esta significação é encontrada na analogia.

Para Granger (1974, p. 140), “um símbolo lógico ou matemático não tem, enquanto tal, outro interpretante a não ser seu próprio ‘objeto’”. A significação desaparece na língua formalizada, pois o sistema simbólico é construído e ordenado na experiência dos próprios símbolos. Os símbolos matemáticos não estão ligados diretamente à língua natural, eles precisam apresentar sentidos para o processo de construção possível de uma outra linguagem.

O símbolo lógico não tem outro interpretante que não seja o seu próprio objeto. A língua natural e suas remissões significativas são vistas como material significante. Não se pode pensar o modelo significante construído como necessariamente consciente. A língua natural é instrumento de comunicação, e o conteúdo de comunicação é tomado como experiência.

A organização do pensamento recebe uma estrutura que é constituída de objetos. A lógica é a estruturação da experiência (um momento vivido) de um objeto. Esta formalização lógica apresenta um resíduo. De acordo com Granger (1970, p. 87):

toda prática poderia ser descrita como uma intenção de transformar a unidade da experiência em unidade de uma estrutura, porém esta intenção implica sempre um resíduo. A significação se originaria nas alusões a esse resíduo, que a consciência

laboriosa capta na obra estruturada e introduz como imperfeição da estrutura (tradução minha).

O uso da língua implica uma codificação objetivante da experiência. A criação de uma estrutura da experiência e transmutada em objeto, provoca, no usuário da língua, a evocação de interpretantes, na tentativa de recuperar os resíduos desta codificação. Isso ocorre de uma maneira “mais ou menos sistemática e consciente” (tradução minha) (p. 100). Granger conclui que “toda experiência humana é, em alguma medida, objetivante” (tradução minha) (p. 121). Os interpretantes definem as significações, as remissões a experiências vividas, já estruturadas no simbolismo.

No processo de formalização da linguagem, não aparecem os resíduos das significações. Precisamos, no decorrer do discurso, falar, retomar a fala e explicar com outras palavras. Porém, no símbolo matemático, não existem outros interpretantes que não seja o próprio objeto, por isso, buscamos, no modelo formalizado, analogias com outros objetos. O signo matemático remete sempre a um objeto que está relacionado com outros objetos. Estas correlações o levam necessariamente à categoria do conceito.

O conceito do objeto percebido nasce das analogias com outros objetos que estão armazenados na memória. A imaginação cria as relações dos conceitos destes objetos e as conecta com o objeto percebido. Dessa forma, o sujeito se depara com a realidade matemática, realidade que, como conforme Marco Panza (1995), procede geneticamente de seus conceitos.

REFERÊNCIAS

- BARUK, Stella. *L'âge du capitaine : De l'erreur en mathématiques*. Paris: Editions du Seuil, 1985.
- CAVEING, Maurice. *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.
- DAVIS, P., HERSH, R. *L'univers mathématique*. Paris: Gauthier-Villars, 1990.
- GADAMER, Hans Georg. *Verdad y método*. Salamanca: Ediciones Sígueme, 1993.
- GLOCK, Hans-Johann. *Dicionário Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.
- GRANGER, Gilles-Gaston. *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- _____. *Objeto, estructuras y significaciones*. In: *Estructuralismo y Epistemologia*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1970.
- HEIDEGGER, Martin. *Ser e Tempo*. Petrópolis: Vozes, 1986.

PANZA, M., SALANSKIS. J., L'objectivité mathématique: Platonismes et structures formelles. Paris: Masson, 1995.

SILVA, Benedito A. et al. Educação Matemática : uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

WITTGENSTEIN, Ludwig. Da certeza. Lisboa: Edições 70, 2000.

_____. Observaciones sobre los fundamentos de la matemática. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

MOVIMENTO PARA A AÇÃO DE UM NOVO CONCEITO MATEMÁTICO

RESUMO:

O conceito matemático antes de ser interpretado pelo aluno obedece às exigências e à lógica da matemática, após a interpretação depende da própria lógica do aluno. A modificação do conceito surge no momento em que o sujeito, ao interpretar a regra matemática, estabelece novas regras forjadas durante o processo de sua aplicação. Ao atribuir sentidos em cada ato de interpretação, o conceito do objeto se modifica conforme o contexto. Na contingência, o aluno projeta sentidos aos objetos matemáticos (que têm um automovimento previsto), porém a sua imaginação inventiva é imprevisível. Nestas circunstâncias, o conceito passa a ser reconstruível a cada ato de interpretação. As condições de leitura e de compreensão do objeto definem a construção do conceito matemático, a qual está em constante mudança, na perspectiva do aluno.

Palavras-chave:

Ensino e Aprendizagem da Matemática, Conceito Matemático, Re-significação do Conceito Matemático, Erro do Aluno na Matemática.

MOVIMENTO PARA A AÇÃO DE UM NOVO CONCEITO MATEMÁTICO

ABSTRACT:

The mathematical concept before being interpreted by the student obeys both to the mathematics demands and logic. The concept after being interpreted depends only on the student's own logic. The concept alteration appears at the moment the subject establishes new rules by interpreting the mathematical rule, forged during its application process. The concept of object alters according to the context, whenever it gives sense to each interpreting act. In the contingency, the student projects senses to the mathematical objects (which have a predictable self movement) but his inventive imagination is unpredictable. Under those circumstances, the concept starts to be re-constructable in each interpreting act. The reading and comprehension condition of the object defines the construction of mathematical concept, which is in a constant change in the student's mathematical perspective.

Key words:

Mathematics Teaching/Learning, Mathematical Concept, Re-significance of Mathematical Concept, Student's mistake in Mathematics.